

Fachreferat Mathematik

Thematik: Das Bernoulli Experiment – Bernoullische Formel: Herleitung und Berechnungen der Wahrscheinlichkeit + Erklärung des Tabellenwerks

Gliederung:

1. Das Bernoulli Experiment – Bernoulli Ketten

2. Herleitung der Formel

3. Aufgaben zur Binomialverteilung

4. Tabellenwerk - Erklärung

1. Das Bernoulli Experiment

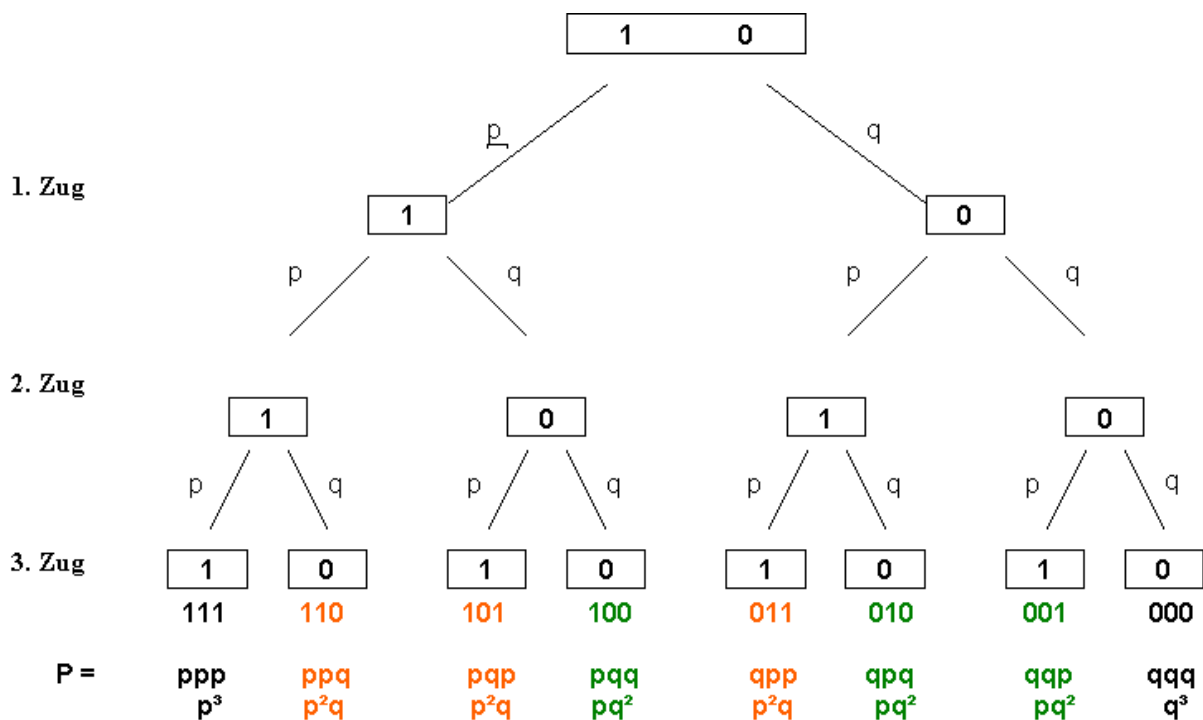
Im Gegensatz zu einem Laplace-Experiment, wo alle Ereignisse mit der selben Wahrscheinlichkeit eintreten, fordert ein Bernoulli Experiment zweierlei:

1. **Jeder Versuch hat GENAU 2 Ausgänge (Niete oder Treffer)**
2. **die Versuche laufen alle unter exakt den gleichen Voraussetzungen ab.**

Außerdem kann man noch erschließen, dass nicht beide möglichen Ausgänge eines Versuchs die gleichen Wahrscheinlichkeiten haben müssen!!

Ein einfaches Beispiel für ein Bernoulli Experiment ist das Ziehen von Kugeln aus einem Glas. Jeder Versuch hat nur zwei Ausgänge (Treffer oder Niete) und unter der Voraussetzung dass die Kugeln anschließend **wieder zurückgelegt werden** findet auch jeder Versuch unter den gleichen Bedingungen statt – man spricht daher von einer **unabhängigen Ziehung**

Zurück zum Beispiel mit den Kugeln:



Bei einem Bernoulli Experiment bezeichnet man einen erfolgreichen Ausgang eines Experiments – praktisch einen **Treffer mit der Ziffer 1** – eine **Niete mit der Ziffer 0** – so haben wir am Anfang des Experiments praktisch Niete und Treffer- Möglichkeiten – Angenommen wir würden 3 Ziehungen durchführen würden sich folglich weitere drei Treffer-Niete – Möglichkeiten ergeben (siehe Bild) – anstatt den Kugeln Farben zu geben habe ich die jeweiligen Kugeln mit p und q bezeichnet – (ganz normales Baumdiagramm)

Nach dem dritten Zug und damit das Experiment abgeschlossen, kann man zusammenfassen indem man alle Zweige notiert dass sich acht Ergebnisse zustande gekommen sind – dann werden noch alle p und q's zusammengefasst – fertig!

Zusammenfassend kann man also sagen:

Def. **Bernoulli Experiment**: Ein Zufallsexperiment heißt Bernoulli Experiment, wenn es nur zwei Ergebnisse hat (Niete und Treffer). Eine Niete wird mit 0 ein Treffer mit 1 bezeichnet

Eine Zufallsvariable die bei einem der Ergebnisse den Wert 1 (Treffer), bei anderen den Wert 0 (Niete) annimmt heißt **Bernoulli Variable**. Die Wahrscheinlichkeit für Treffer wird mit p für Niete mit $q = 1 - p$ bezeichnet – Anhand eines Beispielen wird dies klarer:

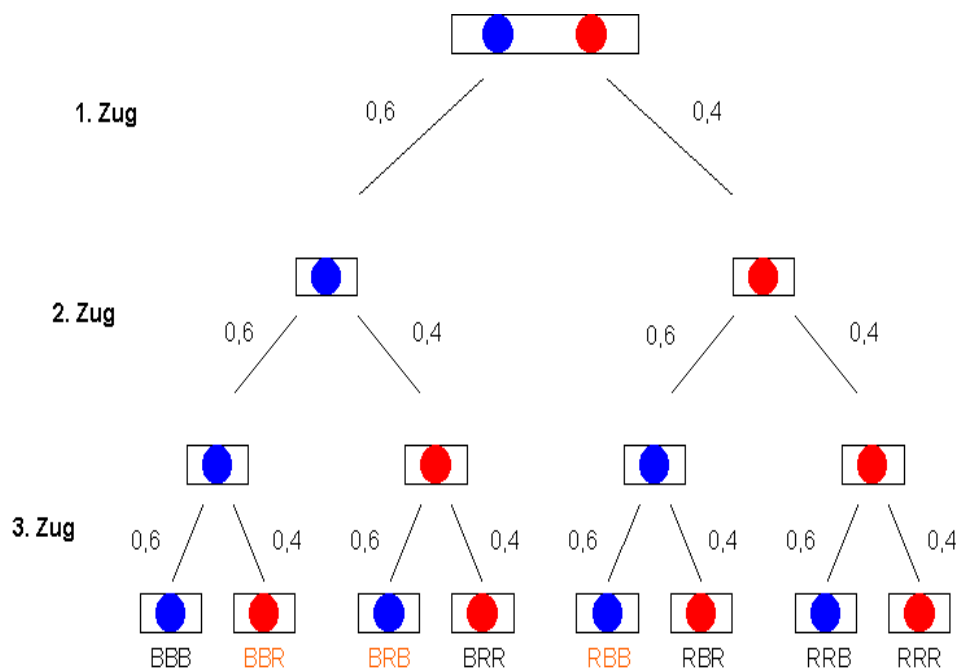
1. Wurf eines Würfels – wir wollen eine Sechs ziehen
 $E = \{6\}$; Gegenereignis = $E = \{1,2,3,4,5\}$ - - $P(E) = 1/6$; $P(E) = 5/6$
2. Münzwurf – $E\{Z\}$ oder $E\{W\}$ - - $P(E) = 1/2$ - - $P(E) = 1/2$

Bernoulli Kette: Ein Zufallsexperiment, dass aus n (x -beliebigen) Durchführungen desselben Bernoulli Experiments besteht, heißt Bernoulli Kette der Länge n (mehrere unabhängige Durchführungen des Bernoulli Experiments)

Wie erkennt man eine Bernoulli Kette – Beispiel

- a) Ein Würfel wird 3 mal geworfen und es soll festgestellt werden ob eine 1 geworfen wurde oder nicht. Es handelt sich dabei um 3 unabhängige Durchführungen, da die Würfel ja 3 mal wieder geworfen werden, d.h. sie müssen zurück in die Urne gelegt werden (Ausgangssituation). Die Trefferwahrscheinlichkeit beträgt $p=1/6$ bzw. handelt es sich um eine Bernoulli Kette der Länge 3
- b) Eine Urne enthält 6 schwarze und 3 rote Kugeln. Bei jedem dritten Zug wird die Farbe der gezogenen Kugel notiert. Ein Treffer wäre das Ergebnis schwarz. Da nach jedem Zug die gezogene Kugel wieder in die Urne kommt sind die Ziehungen unabhängig = **eine unabhängige Durchführung**. Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer beträgt demnach $p=0,06$, die Bernoulli Kette hat die Länge 3 (wegen drei Zügen)
- c) In unserem Glas befinden sich insgesamt 10 Kugeln, davon 6 Blaue und 4 Rote. Die WK (Wahrscheinlichkeit) dafür eine blaue Kugel zu ziehen ist also 0,6 die WK für eine rote Kugel ist 0,4.
Angenommen wir ziehen 3 mal aus unserem Glas und interessieren uns dafür wie groß die WK ist, dass von diesen 3 Kugeln zwei blaue sind, ist uns die REIHENFOLGE der BEIDEN KUGELN EGAL!! Wichtig ist nur die Anzahl der Erfolge, weil – wie wir gesehen haben – ohnehin alle Erfolge die gleiche WK haben!

Wie wir bereits wissen, interessiert man sich bei einem Experiment vielfach nur für die Anzahl X der Erfolge, die bei n Versuchen auftreten, nicht jedoch für die Reihenfolge, in der die Erfolge und Misserfolge eintreten.



Wann ist es dann keine Bernoulli Kette? Es würde sich um keine Bernoulli Kette handeln, **wenn die Ziehungen nicht mehr wiederholt werden dürften**, d.h. Kugeln die gezogen wurden nicht mehr in die Urne gelegt werden dürften, es würde sich die **Trefferwahrscheinlichkeit von Zug zu Zug ändern**. Man könnte ja nur aus einer kleineren Anzahl von Kugeln wählen!! Ausnahme wäre eine Urne mit vielen Kugeln jeder Sorte (große Auswahlmöglichkeit – dass es auf ein paar gezogene Kugeln auch nicht mehr ankommt!)

2. Herleitung der Formel von Bernoulli

0 = Niete $P\{0\} = q = 1 - p$

1 = Treffer $P\{1\} = p$;

Es stellt sich nun die Frage nach der **Wahrscheinlichkeit**, in einer Bernoulli-Kette der Länge n (beliebig lang) und der Trefferwahrscheinlichkeit p genau k Treffer zu erhalten –
 Der Fall dass alle k Treffer am Anfang und damit $(n - k)$ Nieten am Ende der Bernoulli Kette stehen tritt wegen der Unabhängigkeit der Bernoulli Experimente mit der Wahrscheinlichkeit:

$$P(\{(1,1,1,\dots,0,0,0,0)\}) = p^k q^{n-k}$$

Für die Wahrscheinlichkeit bei n - Zügen genau k Treffer und genau $n - k$ Nieten zu erhalten ist $p^k q^{n-k}$

Es ergibt sich die Formel $p^k q^{n-k}$

Nun stellt sich die Frage auf wie viele Arten man aus n - Möglichkeiten k Treffer ziehen kann
 $\binom{n}{k}$ z.B. 2 von 3 Sitzplätzen werden besetzt $\binom{3}{2} = 3$ Möglichkeiten
 $\binom{3}{1} = 3$ Möglichkeiten
 $\binom{3}{0} = 1$ Möglichkeit
 $\binom{3}{3} = 1$ Möglichkeit
 $\binom{3}{2} = 3$ Möglichkeiten
 $\binom{3}{1} = 3$ Plätze
 $\binom{3}{0} = 1$ Platz

Für die Lage der k - Treffer in der n - gliedrigen Kette gibt es genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten

Insgesamt ergibt sich daraus die Binomial- Verteilungs-Formel.

$$B(n,p,k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Welche man kürzen kann da $1-p = q$ entspricht:

Zusammenfassend: Für die Wahrscheinlichkeit $B(n,p,k)$ bei n Zügen genau k Treffer zu erhalten wenn p die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer bei jedem Zug ist, gilt die Bernoullische oder Newtonsche Formel:

$$p_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

p = die konstante Wahrscheinlichkeit für den Eintritt eines Ereignisses beim Einzelversuch

(Wahrscheinlichkeit für einen Treffer bei jedem Zug)

q = konstante Wahrscheinlichkeit für das Eintreten einer Niete $1 - p = q$

n = Anzahl der Ausführungen des Bernoulli Experiments (Umfang, **Anzahl der**

Durchführungen)

k = aus wie vielen gegebenen Möglichkeiten ein Treffer erzielt werden soll

X = Zufallsgröße, entspricht unserem k

Beispiele zur Binominal-Verteilung

- a) Mit Hilfe eines idealen Würfels soll genau innerhalb von 3 Würfeln zweimal eine 6 erscheinen

$$n = 3 \text{ (3 Würfe)} ; p = 1/6 ; k = 2 ; q = 1-p = 5/6$$

Einsetzen in die Formel:

$$\binom{3}{2} * (1/6)^2 * (5/6) = 3 * 1/6 * 5/6 = 0,0069 = 5/72$$

- b) Eine Urne enthält 36 weiße und 64 rote Kugeln – Es werden immer 5 Kugeln nacheinander entnommen und die Farbe notiert. Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit unter 5 Kugeln genau 3 rote zu ziehen
(X ist die Anzahl der roten Kugeln bei 5 Ziehungen = 3)
 $P(X=3) =$

3. Aufgaben zur Binomialverteilung

- 1) Ein Jäger trifft sein Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit 40%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er bei zehn Schüssen mehr als sechs Treffer?
- 2) In einem „Nachrichtenkanal“ wird ein Zeichen mit der Wahrscheinlichkeit p richtig übertragen. Eine Nachricht besteht aus acht Zeichen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden höchstens zwei Zeichen falsch übertragen? Rechne zuerst allgemein und dann für $p = 0,9$.
- 3) Bei einem Automaten gewinnt man in 30% aller Spiele. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man a) bei 10 Spielen, b) bei 20 Spielen achtmal gewinnt?
- 4) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bienenvolk einen harten Winter überlebt, ist 0,4. Ein Imker besitzt 6 Völker. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 einen harten Winter überleben?

Aufgabenstellung zur Binomialverteilung mit Lösungen

- 1) Ein Jäger trifft sein Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit 40%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er bei zehn Schüssen mehr als sechs Treffer?

$$\begin{aligned}p &= 0,4 \\1-p &= 0,6 \\n &= 10 \\k &= 7,8,9,10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W(X \geq 7) &= \binom{10}{7} \cdot 0,4^7 \cdot 0,6^3 + \binom{10}{8} \cdot 0,4^8 \cdot 0,6^2 + \binom{10}{9} \cdot 0,4^9 \cdot 0,6^1 + \binom{10}{10} \cdot 0,4^{10} \cdot 0,6^0 = \\&= 0,05476\end{aligned}$$

- 2) In einem „Nachrichtenkanal“ wird ein Zeichen mit der Wahrscheinlichkeit p richtig übertragen. Eine Nachricht besteht aus acht Zeichen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden höchstens zwei Zeichen falsch übertragen? Rechne zuerst allgemein und dann für $p = 0,9$.

$$\begin{aligned}p &= 0,9 \\1-p &= 0,1 \\n &= 8 \\k &= 6,7,8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W(X \geq 6) &= \binom{8}{6} \cdot p^6 \cdot (1-p)^2 + \binom{8}{7} \cdot p^7 \cdot (1-p)^1 + \binom{8}{8} \cdot p^8 \cdot (1-p)^0 = \\&= 28 \cdot p^6 \cdot (1-p)^2 + 8 \cdot p^7 \cdot (1-p) + p^8 \\W(X \geq 6) &= 28 \cdot 0,9^6 \cdot 0,1^2 + 8 \cdot 0,9^7 \cdot 0,1 + 0,9^8 = 0,9619\end{aligned}$$

- 3) Bei einem Automaten gewinnt man in 30% aller Spiele. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei 10 Spielen achtmal gewinnt?

$$\begin{aligned}p &= 0,3 \\1-p &= 0,7 \\n &= 10 \\k &= 8\end{aligned}$$

$$W(X = 8) = \binom{10}{8} \cdot 0,3^8 \cdot 0,7^2 = 0,0014467$$

- 4) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bienenvolk einen harten Winter überlebt, ist 0,4. Ein Imker besitzt 6 Völker. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 einen harten Winter überleben?

$$\begin{aligned}p &= 0,4 \\1-p &= 0,4 \\n &= 6 \\k &= 2,3,4,5,6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W(X \geq 2) &= \binom{6}{2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^4 + \binom{6}{3} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^3 + \binom{6}{4} \cdot 0,4^4 \cdot 0,6^2 + \binom{6}{5} \cdot 0,4^5 \cdot 0,6^1 + \\&\binom{6}{6} \cdot 0,4^6 \cdot 0,6^0 = 0,76672\end{aligned}$$

4. Tabellenwerk für Bernoulli – Experimente

Es wäre zeitaufwendig und kompliziert verschiedene Wahrscheinlichkeiten zu berechnen, daher hat man das so genannte Tabellenwerk gemacht – man kann darin Wahrscheinlichkeiten nachlesen und damit gleich weiter rechnen – erleichtert einem erheblich die Arbeit:

Erklärung des Tabellenwerks:

- In der Spalte mit n – sieht man die Anzahl der Experimente – praktisch die Länge der Bernoulli Kette z.B. 3 oder 4

- In der Spalte k steht geschrieben, wie viele der n Versuche Treffer sein sollen – positiv im Sinne des Experiments

- In der Spalte p steht die Wahrscheinlichkeit – wo ein einzelner Versuch positiv ausgehen soll

- In der Spalte $B(n,p,k)$ wird die Wahrscheinlichkeit ersichtlich, dass bei n - Versuchen ein Ereignis **genau k - mal** eintritt, es muss gelten $0 \leq k \leq n$ $P(E) = p$

- In der Spalte $B(n;p;i)$ *Verteilungsfunktion* - sieht man ebenfalls einen Zahlenwert – der gibt wiederum die Wahrscheinlichkeit an bei wie vielen n Versuchen ein Ereignis **höchstens k -mal** eintritt wenn es gilt dass $P(E) = p$

Beispiel zum Tabellenwerk:

Die Wahrscheinlichkeit des Wertes

a) $B(n;p;k) = B(8;0,01;2) = 0,00264$ - - Verteilungswert = 0,99995

b) $B(15,1/6;8) = 0,00107$ - Verteilungswert wäre 0,99981

c) $B(100;1/3;47) = 0,00148$ Verteilungswert = 0,99833